

EXAMEN



Una catenaria es una curva ideal que representa físicamente la curva generada por una cadena, o hilo, sin rigidez flexional, suspendida de sus dos extremos y sometida a un campo gravitatorio uniforme. Esta palabra proviene del latín *catēnariŭs* ('propio de la cadena'). Por extensión, en matemáticas se denomina catenaria a la curva que adopta una cadena, cuerda o cable ideal perfectamente flexible, con masa distribuida uniformemente por unidad de longitud, suspendida por sus extremos y sometida a la acción de un campo gravitatorio uniforme.

El problema de la catenaria, planteado durante el siglo XVII, consistía en determinar la forma que adoptaba una cadena o cuerda (sin rigidez flexional) dentro de un campo gravitatorio uniforme. Es decir, cuando sobre un segmento de cuerda actuaba el propio peso de la cuerda verticalmente y era sostenido simultáneamente por las tensiones en sus extremos, en direcciones tangentes a un segmento de curva en sus extremos. Los primeros físicos y matemáticos que abordaron el problema supusieron que la curva era una parábola, porque empíricamente la forma de la cuerda se parece mucho a una parábola, especialmente si se consideran longitudes pequeñas de cuerda. Pero fue Christiaan Huygens, a los 17 años, quien demostró que la curva no era realmente una parábola, sino sólo una curva parecida, aunque no encontró la ecuación de la catenaria.

La ecuación fue obtenida por Gottfried Leibniz, Christiaan Huygens y Johann Bernoulli en 1691, en respuesta al desafío planteado por Jakob Bernoulli. Huygens fue el primero en utilizar el término catenaria en una carta dirigida a Leibniz en 1690 y David Gregory escribió, ese mismo año, un tratado sobre la curva.

La condición de equilibrio de un cable sometido a su propio peso vertical lleva a un problema de equilibrio en el plano (la catenaria es siempre una curva plana si se puede despreciar la rigidez flexional del cable). De la condición de equilibrio local de cada punto se desprende la siguiente ecuación

diferencial para la pendiente de la catenaria, que relaciona las tensiones en los extremos de un tramo y el peso del mismo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\lambda}{T_H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Dónde:

λ es el peso por unidad de longitud, que se supone constante.

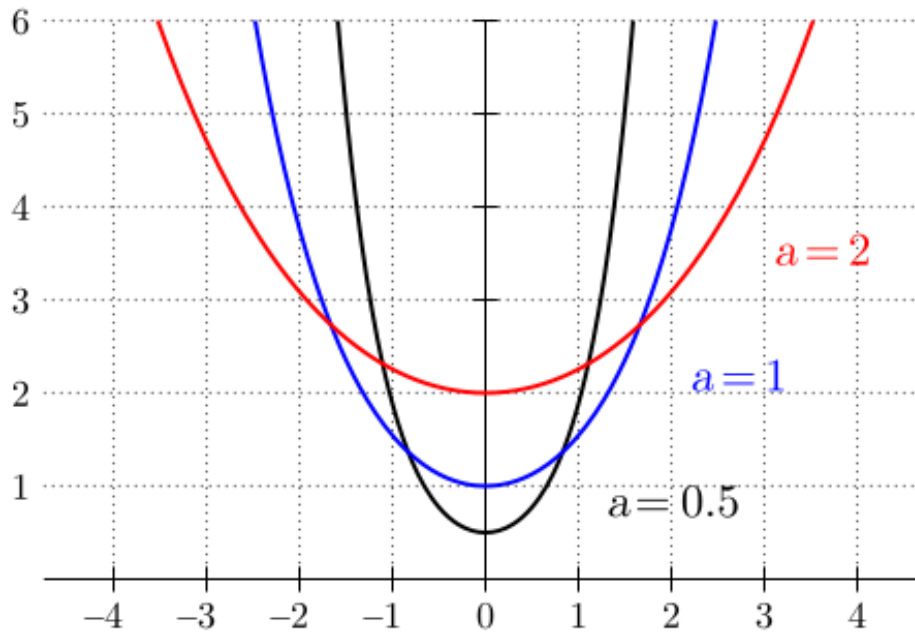
T_H la tensión horizontal que aparecerá en los extremos del cable.

La solución general viene dada por:

$$y(x) = \frac{T_H}{\lambda} \cosh\left(\frac{\lambda}{T_H}(x - C_1)\right) + C_2 = a \cosh\left(\frac{x - C_1}{a}\right) + C_2$$

La solución para de la ecuación anterior para un cable suspendido de dos puntos a la misma altura y cuyo punto mínimo es, tomando su mínimo en el punto (0,a) resulta ser:

$$\begin{cases} y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}) \\ a = \left(\frac{T_H}{\lambda}\right) \end{cases}$$



En el caso de cable suspendido de dos puntos a la misma altura, la longitud del arco, con el origen de arco en el mínimo es:

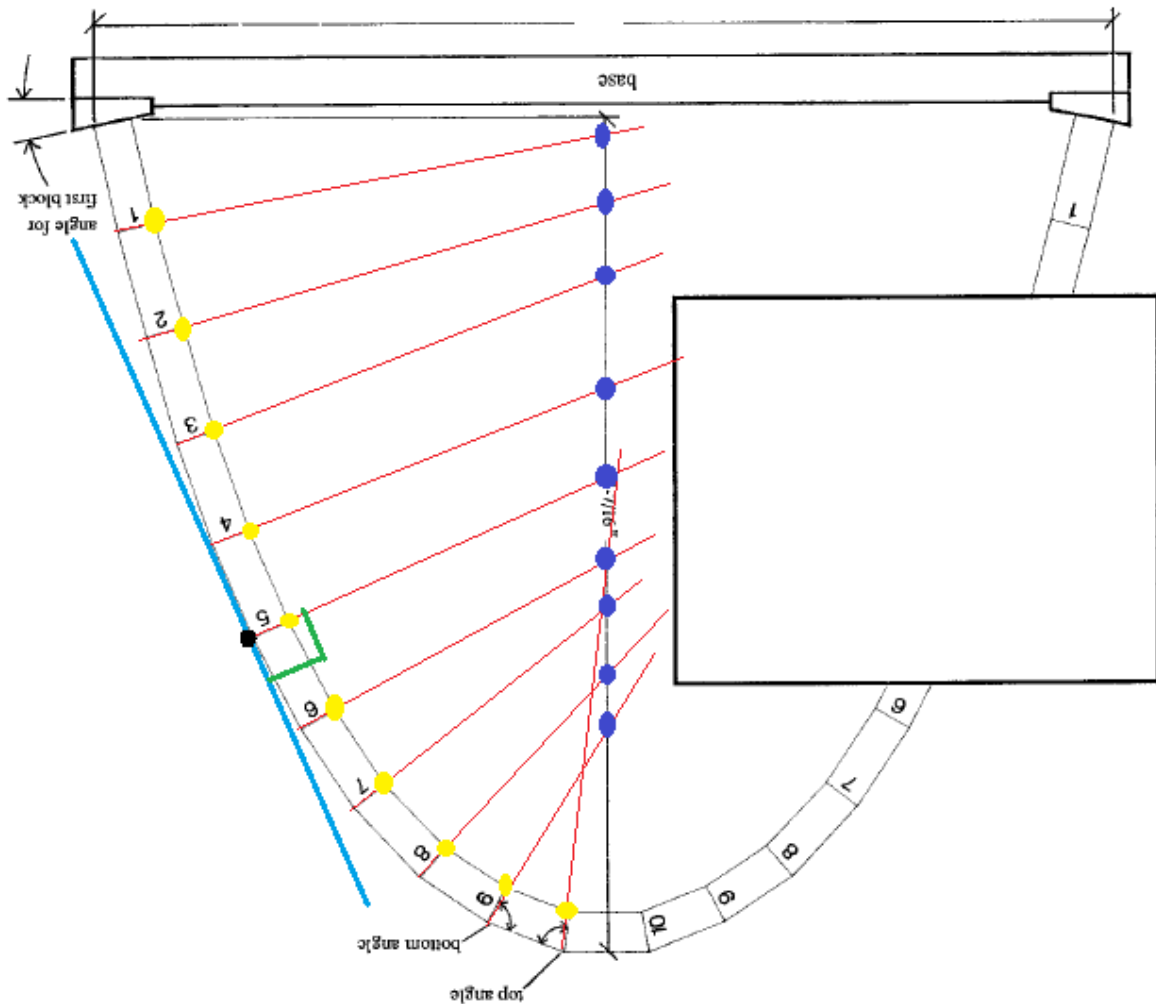
$$l = a \cdot \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

La inclinación (esto es, la tangente de dicha inclinación) es:

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

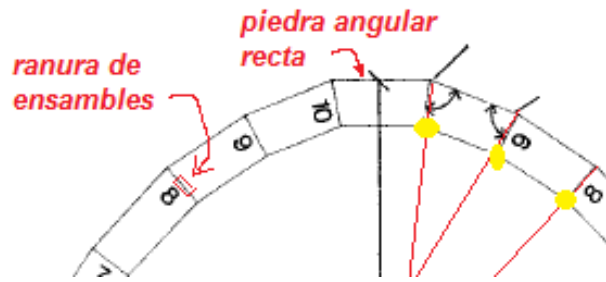
<https://es.wikipedia.org/wiki/Catenaria>

- 1.- Reproduzca las gráficas para las catenarias mostradas en la gráfica de la explicación. Mismos valores de a y mismos colores
- 2.- Respetando los mismos colores de la gráfica anterior. Obtenga la gráfica para la longitud de la cuerda e interprete y explique los resultados.
- 3.- Respetando los mismos colores de la gráficas anteriores Obtenga la gráfica para la pendiente, e interprete y explique los resultados.
- 4.- Compare gráficamente el cálculo de la derivada de la catenaria obtenido en el punto 3 con la aproximación numérica con la función **diff**
- 5.- Para la catenaria con $a = 0.5$, para $-1 < x < 1$ y numero de dovelas = 10 (en la mitad de la catenaria), encuentre las coordenadas de los puntos morados.



- 5.- Encuentre las coordenadas de los puntos amarillos.
- 6.- Dibuje la sección de las rectas rojas entre las dos catenarias para construir las dovelas.

7.- Agregue las instrucciones en rojo.



8.- Agrega detalles a su gusto

9.- Corte

10.- Entregue un reporte de este examen.